

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Α. ΤΟΛΙΑΣ, Ε. ΝΙΚΟΛΙΔΑΚΗΣ, 3/9/2019

Θέμα 1. [1 μον.]

Να λυθεί η εξίσωση $\sin(10x) + \sqrt{3}\cos(10x) = \sqrt{2}$. [Υπόδειξη: Να φέρετε την παράσταση του πρώτου μέλους στη μορφή $c \cdot \sin(10x + \phi)$ ή στη μορφή $c \cdot \cos(10x + \phi)$].

Θέμα 2. [1 μον.]

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee q] \qquad [p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee r].$$

Θέμα 3. [1,5 μον.]

(α) Αν $A = \{1, 2\}$ να βρείτε το σύνολο $B = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ και το σύνολο $\Gamma = \mathcal{P}(B)$.

(β) Αν Γ, Δ δύο σύνολα, να δείξετε ότι $\Gamma = \Delta$ αν και μόνο αν $\Gamma \cup \Delta \subseteq \Gamma \cap \Delta$.

Θέμα 4. [2 μον.]

(α) Στο σύνολο $E = \{a, \beta, \gamma, \delta\}$ να ορίσετε μια σχέση διάταξης \leq η οποία να έχει μέγιστο στοιχείο το a και ακριβώς δύο ψευδοελάχιστα (minimal ή ελαχιστικά), τα β, γ .

(β) Στο σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών ορίζουμε τη σχέση σ ως εξής:

$$x \sigma y \Leftrightarrow \text{ο αριθμός } x - y \text{ είναι άρρητος.}$$

Να εξετάσετε αν η σ είναι ανακλαστική (αυτοπαθής), συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

Θέμα 5. [2 μον.]

(α) Έστω $f : K \rightarrow \Lambda$ και $g : \Lambda \rightarrow M$ δύο συναρτήσεις. Αν η g είναι 1-1 και η $g \circ f$ είναι επί να δείξετε ότι η f είναι επί.

(β) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$, $B = (-\infty, 1]$ και $\Gamma = (\frac{1}{2}, 3]$ να υπολογίσετε τα σύνολα $f(B)$, $f^{-1}(B)$, $f(f^{-1}(B))$ και $\Gamma \Delta f(f^{-1}(B))$.

Θέμα 6. [2 μον.]

(α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς.

(β) Δίνεται το σύνολο $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$. Να εξετάσετε αν το σύνολο B έχει μέγιστο στοιχείο. Να δείξετε ότι $\sup B = \sqrt{2}$.

Θέμα 7. [1,5 μον.]

(α) Έστω A ένα άπειρο σύνολο. Να δείξετε ότι υπάρχει $\Gamma \subseteq A$ με $\mathbb{N} \simeq \Gamma$.

(β) Να δείξετε ότι $[7, 8] \cup [11, 12] \simeq [7, 10]$.

Καλή επιτυχία!